$3^{ème}$ **ARITHMETIQUE** Leçon 1

I. DIVISIBILITE

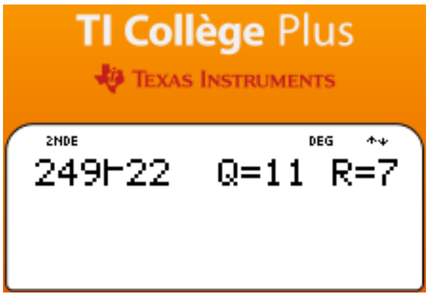
a. Division euclidienne

Définition : Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le quotient q et le reste r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et } 0 \leq r < b$$

Exemple : division euclidienne de 249 par 22

A la main :



b. Diviseurs et multiples

Définition : Un nombre a est **divisible** par un nombre b lorsque le **reste de la division euclidienne** de a par b est **nul**, c'est à dire lorsque le quotient de a par b est un nombre **entier**.
On dit aussi que b est un diviseur de a.

☑ Exemple : 18 est divisible par 6 car 18 = 6 x 3 + 0

On dit que 6 et 3 sont des diviseurs de 18 et que 18 est un multiple de 6 et de 3.

✔ Citer 2 nombres qui ne sont pas des diviseurs de 18 :
✔ Citer d'autres diviseurs de 18 :

Remarque : 1 est un diviseur de tout entier et chaque entier est divisible par lui-même.

☑ Critères de divisibilité : Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair, (ex :)
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5, (ex :)
- par 10, si son chiffre des unités est 0, (ex :)
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3, (ex :)
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9. (ex :)

☑ Applications :

✔ 60 est divisible par
✔ 792 est divisible par …

c. Nombres premiers

Définition : Un nombre est **premier** lorsqu'il est divisible par exactement 2 nombres : 1 et par lui même.

☑ Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, … Cette liste est infinie.
☑ Remarque : 1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur : lui même.
☑ Exercice :

✔ 12 est il premier ?

✔ Donner la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

II. COMMENT DECOMPOSER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

Propriété : Tout nombre entier non premier peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Cette décomposition en facteurs premiers est UNIQUE.

☑ Exemple : 12 = 2 x 2 x 3 (chaque facteur est un nombre premier !) on peut s'aider d'un schémas

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

☑ Méthode : Pour décomposer 252 en facteurs premiers, on va déterminer ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant

- ✔ 252 est divisible par 2 donc 252 = 2 x 126
- ✔ 126 est divisible par 2 donc 252 = 2 x 2 x 63
- ✔ 63 est divisible par 3 donc 252 = 2 x 2 x 3 x 21
- ✔ 21 est divisible par 3 donc 252 = 2 x 2 x 3 x 3 x 7
- ✔ 7 est premier donc la décomposition est terminée.

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On obtient ainsi : 252 = 2 x 2 x 3 x 3 x 7 = 2^2 x 3^2 x 7

III. COMMENT RENDRE UNE FRACTION IRREDUCTIBLE

Définition : Une fraction est **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

☑ Exemple : Rendre irréductible $\frac{30}{252}$.

On va décomposer numérateur et dénominateur en produit de facteurs premiers !

$$\frac{30}{252}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times 5}{\cancel{2}\times 2\times\cancel{3}\times 3\times 7}=\frac{5}{2\times 3\times 7}=\frac{5}{42}$$

IV. LE POINT SUR LES NOMBRES

✔ Les entiers **naturels** $\mathbb{N}$ sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule : 0 ; 1 ; 2… mais aussi $\sqrt{4}$; $\frac{6}{3}$

✔ Les nombres **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$ sont les nombres entiers positifs ou négatifs.

☑ Exemples **:** -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ... et aussi $\frac{-24}{6}$ sont des nombres entiers relatifs.

✔ Les nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$ sont les nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers.

➔ Si la **division tombe juste**, on les appelle aussi " nombres **décimaux** $\mathbb{D}$ ".

Par exemple $\frac{3}{2}$ = 1,5 est rationnel mais aussi décimal.

➔ Certains rationnels sont négatifs. Par exemple $-\frac{2}{3}\approx -0{,}6666...$

✔ **ATTENTION :** Certains nombres n'entrent dans aucune de ces catégories. On dit qu'ils sont **irrationnels**.

☑ Exemples **:** $\sqrt{2}$, π …

Conclusion : $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ qui est inclus dans $\mathbb{D}$ qui est inclus dans $\mathbb{Q}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}$.

On écrit : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels

Application : Un même nombre peut-il appartenir à plusieurs familles ?

Fiche méthode **ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS DE FRACTIONS** *Niveau 4ème*

I. EXEMPLE DETAILLE

Pour effectuer $\frac{7}{6}+\frac{9}{10}$, on réduit les fractions au même dénominateur à l'aide des **multiples communs**.

Multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 …
Multiples de 10 : 10, 20, 30, 40, 50 …

Le plus petit **multiple commun** est donc 30

$$\frac{7}{6}+\frac{9}{10}=\frac{7\times 5}{6\times 5}+\frac{9\times 3}{10\times 3}=\frac{35}{30}+\frac{27}{30}=\frac{62}{30}$$ on peut simplifier $$\frac{62}{30}=\frac{\cancel{2}\times 31}{\cancel{2}\times 15}=\frac{31}{15}$$

II. A VOUS

$$\frac{5}{9}+\frac{7}{12}=\frac{5\times\ldots}{9\times\ldots}+\frac{7\times\ldots}{12\times\ldots}=\frac{\ldots}{36}+\frac{\ldots}{36}=\frac{\ldots}{36}$$

Multiples de 9 :
Multiples de 12 :

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 4 :
Multiples de 7 :

$$\frac{11}{2}-\frac{5}{9}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}-\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 2 :
Multiples de 9 :

$$\frac{5}{16}-\frac{7}{24}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}-\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 16 :
Multiples de 24 :

$$6-\frac{3}{8}=\frac{6}{}-\frac{3}{8}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}-\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 1 :
Multiples de 8 :

$$\frac{5}{7}+2=\frac{5}{7}+\frac{2}{}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 7 :
Multiples de 1 :

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{4}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 2 :
Multiples de 3 :
Multiples de 4 :

$$\frac{1}{6}+\frac{13}{18}-\frac{5}{9}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}-\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 6 :
Multiples de 18 :
Multiples de 9 :

$$\frac{7}{8}+5-\frac{1}{12}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}+\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}-\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\times\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Multiples de 8 :
Multiples de 1 :
Multiples de 12 :

Vous pouvez vérifier vos réponses à l'aide d'une calculatrice et de la touche fraction.

Fiche méthode **MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS DE FRACTIONS** *Niveau 4ème*

I. LES REGLES

Règle : Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.

$\frac{7}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{7\times5}{3\times4}=\frac{35}{12}$; $\frac{-5}{11}\times\frac{-3}{-2}=-\frac{5\times3}{11\times2}=-\frac{15}{22}$ Il y a 3 facteurs (-), donc le résultat est (-).

L'inverse de $\frac{14}{9}$ est $\frac{9}{14}$,l'inverse de $-\frac{2}{3}$ est $-\frac{3}{2}$

Règle : Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

$\frac{7}{4}\div\frac{5}{3}=\frac{7}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{20}$ *Attention on recopie la première fraction et seule la 2ème fraction est INVERSE !*

$\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{5}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{11}=\frac{15}{44}$ *Autre façon de présenter une division.*

II. EFFECTUER ET REDUIRE LORSQUE CELA EST POSSIBLE

$A=\frac{7}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{\dots}{\dots}\times\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

$B=\frac{-5}{-3}\times\frac{2}{-7}=-\frac{5}{3}\times\frac{2}{7}=-\frac{\dots}{\dots}$

$C=-8\times\frac{7}{6}=-\frac{8}{1}\times\frac{\dots}{\dots}=-\frac{\dots}{\dots}$

$D=\frac{11}{10}\div\frac{3}{4}=\frac{11}{10}\times\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

$E=\frac{-1}{2}\div\frac{5}{-6}=\frac{\dots}{\dots}\times\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

$F=\frac{5}{-9}\div\frac{-2}{-7}=-\frac{\dots}{\dots}\times\frac{\dots}{\dots}=-\frac{\dots}{\dots}$

$G=\frac{7}{9}\div12=\frac{\dots}{\dots}\times\frac{1}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

$H=3\div\frac{5}{7}=\frac{\dots}{1}\times\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

Vous pouvez vérifier vos réponses à l'aide d'une calculatrice et de la touche fraction.

III. CALCULER UNE EXPRESSION

$I=\frac{7}{8}\times\frac{7}{2}-\frac{5}{4}\times\frac{9}{4}=\frac{\dots}{16}-\frac{\dots}{16}=\frac{\dots}{16}$

$J=\left(\frac{7}{6}\right)^2-\frac{11}{18}\div2=\frac{7^2}{6^2}-\frac{\dots}{\dots}\times\frac{1}{2}=\frac{\dots}{\dots}-\frac{\dots}{\dots}=\frac{38}{36}=\frac{2\times\dots}{2\times\dots}=\frac{\dots}{\dots}$

On commence par effectuer : les calculs entre parenthèses, puis les puissances, les multiplications et les divisions et on termine par les additions et les soustractions.

Exercice 1 : Calculer les expressions suivantes et mettre sous forme de fraction irréductible

$A=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ $B=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}$ $C=1+\frac{12}{8}$ $D=\frac{7}{9}\div\frac{21}{6}$

Exercice 2 : Vrai ou faux, justifier

a) 3 est un diviseur de 43.
b) 132 est divisible par 11.
c) 7 a pour diviseur 21.
d) 222 est un diviseur de 31 024.
e) 31 024 est un multiple de 113.
f) 45 a pour diviseur 5.
g) 24 a pour multiple 240.
h) 5 divise 450.
i) 8 est un diviseur de 0.
j) 1 est un multiple de 67.
k) 27 est un nombre premier.
l) 17 est un nombre premier.

Exercice 3 : Expliquer pourquoi chacun de ces nombre n'est pas premier

175 146 183 3327 10 000 123 456

Exercice 4 : Décomposer chacun des nombres en produit de facteurs premiers

32 110 45 93 480 1 000

Exercice 5 :

a. Décomposer en produit de facteurs premiers 68 , 96 et 180
b. Rendre irréductible les fractions : $\frac{68}{96}$; $\frac{180}{68}$ et $\frac{96}{180}$

Exercice 6 : Mettre sous forme de fraction irréductible

$a=\frac{16}{48}$ $b=\frac{51}{126}$ $c=\frac{25}{100}$ $d=\frac{3^2\times5^4}{5^3\times3^4}$

Exercice 7 :

a. Rendre irréductible les fractions $\frac{20}{130}$ et $\frac{42}{182}$
b. Adrien doit calculer $\frac{20}{130}+\frac{42}{182}$, son frère Geoffroy a déjà trouvé mentalement.
Comment a-t-il fait ?

Exercice 8 : Nombre parfait

Un nombre entier est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.
Par exemple, 6 est un nombre parfait.
Ses diviseurs sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6.
Ses diviseurs autres que lui-même sont donc 1, 2 et 3.
1 + 2 + 3 = 6 donc 6 est parfait.

4 est-il un nombre parfait ?
28 est-il un nombre parfait ?

Exercice 9 : Brevet

On pose $A=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{13}{8}$

1. Calculer A et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.
2. Le nombre A est-il décimal ? rationnel ? Justifier.